

Kontrol *Tracking Fuzzy* untuk Sistem Pendulum Kereta Menggunakan Pendekatan *Linear Matrix Inequalities*

Rizki Wijayanti, Trihastuti Agustinah

Departemen Teknik Elektro - Fakultas Teknologi Elektro Institut Teknologi Sepuluh Nopember

E-mail: trihastuti@elect-eng.its.ac.id

Abstrak—Sistem Pendulum Kereta adalah suatu *plant nonlinear* dan tidak stabil yang terdiri dari batang pendulum yang berayun searah atau berlawanan arah jarum jam dan bersumbu pada kedua sisi kereta yang dapat bergerak secara horisontal. Makalah ini membahas tentang kontrol *tracking* berbasis model servo tipe 1 dengan *plant* tanpa *integrator* agar Sistem Pendulum Kereta mampu bergerak mengikuti sinyal referensi berupa sinyal *step*. Model *nonlinear* Sistem Pendulum Kereta direpresentasikan dengan model *fuzzy Takagi-Sugeno* dengan didasarkan aturan PDC (*Paralel Distributed Compensation*) untuk memperoleh aturan kontroler. *Gain state feedback* dan *gain integrator* diperoleh dengan menggunakan pendekatan LMI (*Linear Matrix Inequalities*). Hasil simulasi menunjukkan bahwa posisi kereta mampu mengikuti sinyal referensi berupa sinyal *step* dengan nilai IAE (*Integral Absolute Error*) sebesar 0,1986 m.

Kata Kunci—Sistem Pendulum Kereta, *Tracking*, *Fuzzy Takagi Sugeno*, Sistem Servo Tipe 1, *Linear Matrix Inequalities*.

I. PENDAHULUAN

SISTEM Pendulum Kereta merupakan salah satu sistem yang sangat penting untuk penelitian di bidang kontrol. Berbagai teori metode kontrol banyak diuji dan dibandingkan melalui pengujian terhadap Sistem Pendulum Kereta. Hal ini dikarenakan Sistem Pendulum Kereta merupakan sistem *nonlinear* dan tidak stabil serta dapat dilinearkan di sekitar titik keseimbangannya. Sistem Pendulum Kereta adalah suatu *plant* yang terdiri dari batang pendulum yang bergerak secara rotasi searah atau berlawanan arah jarum jam dan bersumbu pada kedua sisi kereta yang dapat bergerak secara vertikal pada suatu lintasan. Tujuan utama dari penelitian ini adalah merancang kontrol *fuzzy T-S* menggunakan pendekatan LMI dengan batasan penempatan *pole*. Hasil yang diharapkan adalah nilai *error tracking* mendekati nol dengan sinyal referensi *step* melalui optimasi menggunakan LMI.

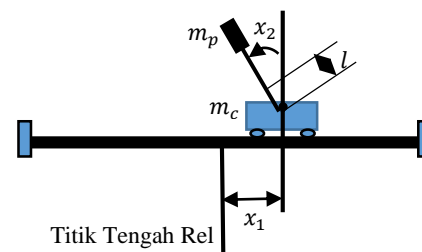
Beberapa metode telah dikembangkan untuk menangani permasalahan *tracking*. Pada [1] kontrol *tracking* menggunakan model *fuzzy T-S* berbasis kontrol optimal. Kontrol *tracking* berbasis model *following* telah dikembangkan pada [2]. Sistem kontrol *tracking* berbasis Sistem Servo Tipe 1 untuk *plant* tanpa *integrator* juga telah diterapkan pada [3] dengan menggunakan metode *pole placement*.

Penyelesaian permasalahan dari Sistem Pendulum Kereta menggunakan desain Sistem Servo Tipe 1 dengan *plant* tanpa *integrator* menggunakan pendekatan LMI

(*Linear Matrix Inequality*) untuk bisa mendapatkan nilai *gain* kontroler dan *gain integrator* diharapkan dapat memberikan respon yang lebih baik agar *plant* dapat mengikuti sinyal referensi berupa sinyal *step*. Karakteristik Sistem Pendulum Kereta yang *nonlinear* direpresentasikan ke dalam model *linear* dengan model *fuzzy T-S* yang didasarkan pada aturan PDC (*Paralel Distributed Compensation*).

II. MODEL MATEMATIKA

Sistem Pendulum Kereta merupakan sebuah benchmark yang digunakan untuk menguji suatu metode kontrol. Sistem Pendulum kereta merupakan sistem *nonlinear*. Sistem Pendulum Kereta terdiri dari sepasang batang pendulum yang bebas berayun secara vertikal dan terpasang pada kereta yang bergerak horizontal pada suatu lintasan dengan panjang lintasan tertentu.



Gambar 1. Diagram Fisik Sistem Pendulum Kereta

Model matematika Sistem Pendulum Kereta dalam bentuk persamaan *state* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \dot{x}_4 &= \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2}\end{aligned}\quad (1)$$

dengan

$$\begin{aligned}a &= l^2 + \frac{J}{m_c + m_p} \\ \mu &= (m_c + m_p)l\end{aligned}$$

III. SISTEM KONTROL TRACKING

Struktur kontrol *tracking* menggunakan struktur servo tipe 1 dirancang untuk mengontrol posisi kereta agar dapat mengikuti sinyal referensi yang diberikan. Sinyal referensi berupa sinyal *step*.

Sistem *nonlinear* Sistem Pendulum Kereta dapat didekati menjadi sistem linear berdasarkan hasil linearisasi

lokal di sekitar titik ekuilibriumnya dan dapat direpresentasikan pada persamaan berikut:

$$\dot{x} = f(x) + h(x, u) \quad (2)$$

Pada penelitian ini linearisasi dilakukan pada tiga daerah kerja, yaitu ± 0 radian, $\pm 0,3$ radian, $\pm 0,5$ radian.

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \sin^2 x_2} \\ \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu \sin^2 x_2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$h(x, u) = \begin{bmatrix} h_1(x, u) \\ h_2(x, u) \\ h_3(x, u) \\ h_4(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{au}{J + \mu \sin^2 x_2} \\ \frac{ul \cos x_2}{J + \mu \sin^2 x_2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Untuk titik kerja pertama :

$x_2 = 0$, $x = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ dan $u = 0$ diperoleh

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u$$

dengan

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2541 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 15,1225 & 0 & -0,0074 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8274 \\ 1,2444 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Untuk titik kerja kedua :

$x_2 = \pm 0,3$, $x = [0 \ \pm 0,3 \ 0 \ 0]^T$ dan $u = 0$ diperoleh

$$\dot{x} = A_2 x + B_2 u$$

dengan

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2082 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 14,3493 & 0 & -0,0074 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8255 \\ 1,1862 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Untuk titik kerja ketiga :

$x_2 = \pm 0,5$, $x = [0 \ \pm 0,5 \ 0 \ 0]^T$ dan $u = 0$ diperoleh

$$\dot{x} = A_3 x + B_3 u$$

dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,1342 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 13,0363 & 0 & -0,0074 \end{bmatrix}; B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8225 \\ 1,0856 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Matriks keluaran untuk ketiga titik kerja adalah:

$$C_1 = C_3 = C_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Berdasarkan nilai matriks A dan B , dapat dibangun model fuzzy T-S untuk aturan *plant* sebagai berikut :

Aturan *plant* ke-1:

if $x_2(t)$ is M_1 (Sekitar 0 radian)

Then $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$

$$y(t) = C_1 x(t)$$

(8)

Aturan *plant* ke-2:

if $x_2(t)$ is M_2 ($\pm 0,3$ radian)

Then $\dot{x}(t) = \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$

$$y(t) = C_2 x(t) \quad (9)$$

Aturan *plant* ke-3:

if $x_2(t)$ is M_3 ($\pm 0,5$ radian)

Then $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$

$$y(t) = C_3 x(t) \quad (10)$$

Untuk menjaga batangan pendulum tetap pada titik ekuilibriumnya dan mengontrol posisi dari kereta pada Sistem Pendulum Kereta maka digunakan sistem *servo* tipe 1. Pada sistem *servo* tipe 1 posisi kereta kembali ke *input* dan menambahkan integrator pada *feedforward* seperti pada Gambar 2 [4]. Berdasarkan Gambar 2 dapat diperoleh:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx \quad (11)$$

maka dapat dibuat *augmented system*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (12)$$

dimana

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}; \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

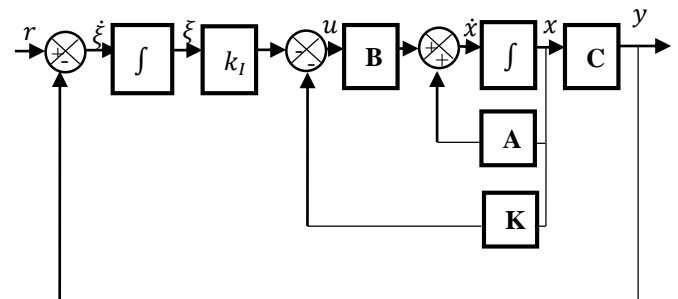
dan sinyal kontrol

$$u = -\bar{K}\bar{x}$$

dimana

$$\bar{K} = -[K \ k_I] \quad (13)$$

dengan K adalah *gain feedback* dan k_I adalah *gain integrator*. K dan k_I dapat dihitung menggunakan pendekatan *Linear Matrix Inequality* (LMI).



Gambar 2. Sistem Kontrol Tracking Model Servo Tipe 1 [4]

Berdasarkan Persamaan (12) dapat dibentuk tiga subsistem *close loop* untuk ketiga model linear sistem pendulum kereta sebagai berikut:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_i \bar{x} + \bar{B}_i u$$

atau

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u, i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

dengan

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,2541 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 15,1225 & 0 & -0,0074 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8274 \\ 1,2444 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,2082 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 14,3493 & 0 & -0,0074 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8255 \\ 1,1862 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

dan

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,1342 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 13,0363 & 0 & -0,0074 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8255 \\ 1,0856 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Berdasarkan matrik *augmented* \bar{A}_i dan \bar{B}_i maka diperoleh nilai K_i dan k_{ii} . Sehingga dapat ditentukan aturan kontroler yang bersesuaian dengan aturan *plant* pada Persamaan (8) sampai (10) sebagai berikut:

Aturan kontroler ke-1:

$$\text{if } x_2(t) \text{ is } M_1 \text{ (Sekitar 0 radian)} \\ \text{Then } u(t) = -\bar{K}_1 x(t) \quad (18)$$

Aturan kontroler ke-2:

$$\text{if } x_2(t) \text{ is } M_2 (\pm 0,3 \text{ radian)} \\ \text{Then } u(t) = -\bar{K}_2 x(t) \quad (19)$$

Aturan kontroler ke-3:

$$\text{if } x_2(t) \text{ is } M_3 (\pm 0,5 \text{ radian)} \\ \text{Then } u(t) = -\bar{K}_3 x(t) \quad (20)$$

Untuk mendapatkan nilai *gain feedback* dan *gain integrator* digunakan algoritma LMI. Jika matrik P definit positif maka sistem *loop* tertutup bersifat stabil asimtotik.

$$\left[(\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j)^T P + P (\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j) \right] < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (21)$$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0, i < j \leq r \quad (22)$$

dengan

$$G_{ij} = \frac{\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j + \bar{A}_j - \bar{B}_j K_i}{2}$$

pre multiplying dan *post multiplying* kedua sisi pertidaksamaan dengan P^{-1} dan dengan menggunakan variabel peubah:

$$P^{-1} = Q$$

$$K_i Q = Y$$

sehingga Persamaan (23) dan (24) menjadi

$$\bar{A}_i Q + Q \bar{A}_i^{-1} - \bar{B}_i Y_i - Y_i^T \bar{B}_i^T < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (23)$$

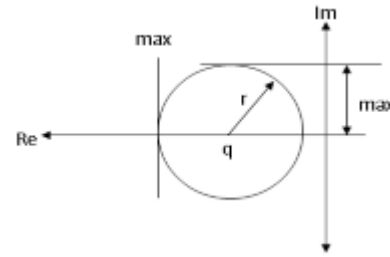
$$\frac{1}{2} [(\bar{A}_i Q + Q \bar{A}_i^{-1} - \bar{B}_i Y_i - Y_i^T \bar{B}_i^T) + \frac{1}{2} [(\bar{A}_i Q + Q \bar{A}_i^{-1} - \bar{B}_i Y_i - Y_i^T \bar{B}_i^T)]] < 0, i < j \leq r \quad (24)$$

Untuk mendapatkan hasil yang lebih baik, pada penelitian ini digunakan batasan berupa penempatan *pole*. Menurut Chilali dan Gahinet [5], daerah LMI diilustrasikan pada Persamaan 25, yaitu

$$D_{q,r} = \{x + jy \in \mathbb{C} : (x + q)^2 + y^2 < r^2\} \quad (25)$$

Persamaan (25), jika diilustrasikan kedalam gambar akan membentuk lingkaran dengan titik pusat lingkaran (-

$q, 0$) dan jari-jari lingkaran r (dengan $r > 0$). Lingkaran tersebut berada sebelah kiri sumbu imajiner seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Lokasi *Pole* dari Lingkaran Daerah D

Jika $\lambda = -\zeta\omega_n + j\omega_d$ diasumsikan merupakan *pole* kompleks pada $D_{q,r}$, maka harus memenuhi kriteria berikut ini

$$\zeta > \sqrt{1 - (r^2/q^2)} \\ \omega_n < q + r \\ \omega_d < r$$

Sistem kontrol *fuzzy* akan stabil pada daerah D (dengan semua *pole* kompleks berada pada daerah D) jika dan hanya jika memenuhi persamaan berikut ini.

$$\begin{bmatrix} -rQ & qQ + Q\bar{A}_i^T + Y_i^T \bar{B}_i^T \\ qQ + Q\bar{A}_i^T + Y_i^T \bar{B}_i^T & -rQ \end{bmatrix} < 0, i < j \leq r \quad (26)$$

IV. HASIL DAN ANALISA

Simulasi dilakukan dengan kondisi awal sudut pendulum adalah 0,3 radian. Kondisi awal untuk posisi kereta, kecepatan kereta dan kecepatan sudut pendulum adalah 0. Sedangkan sinyal referensi yang diberikan adalah sinyal *step*

Kondisi penempatan daerah *pole* yang diinginkan

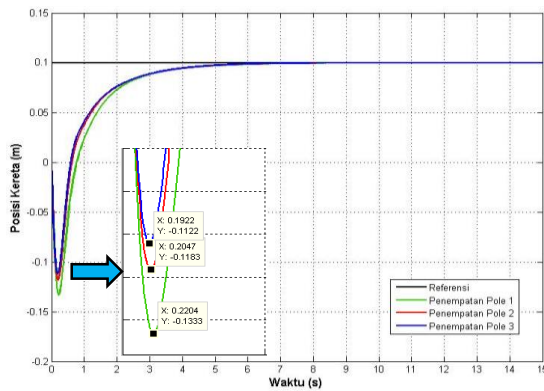
adalah: Pertama : $r = 32$ dan $q = 70$

Kedua : $r = 72$ dan $q = 150$

Ketiga : $r = 162$ dan $q = 330$

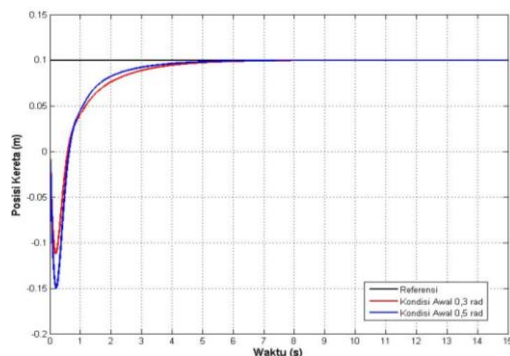
Simulasi dilakukan dengan kondisi awal sudut pendulum adalah 0,3 radian. Kondisi awal untuk posisi kereta, kecepatan kereta dan kecepatan sudut pendulum adalah 0.

Pada Gambar 3 menunjukkan posisi kereta pada sistem pendulum kereta dalam satuan meter untuk ketiga kondisi penempatan *pole*. Terlihat bahwa respon posisi kereta pada ketiga kondisi penempatan *pole* dapat melakukan *tracking* terhadap sinyal referensi yang diberikan. Pada penempatan *pole* pertama memiliki nilai *overshoot* -0,133 meter dan waktu yang dibutuhkan agar kereta dapat mengikuti sinyal referensi sebesar 5,5 detik. Nilai respon posisi kereta memiliki nilai *overshoot* sebesar -0,118 pada penempatan *pole* kedua dan nilai *overshoot* sebesar -0,112 dengan waktu agar posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi sama pada penempatan *pole* pertama yaitu 5,5 detik.

Gambar 4. Posisi Kereta pada Simulasi Variasi Penempatan *Pole*

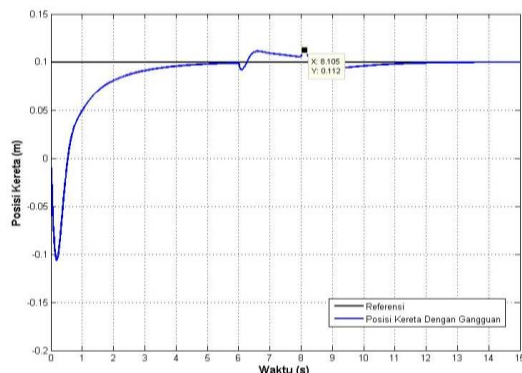
Simulasi dengan berbagai kondisi awal disimulasikan dengan memberikan kondisi awal pada sudut pendulum yaitu 0,3 radian dan 0,5 radian. Kondisi awal untuk posisi kereta, kecepatan kereta dan kecepatan sudut pendulum adalah 0. Pada simulasi ini digunakan skenario penempatan *pole* yang ketiga, dengan $[r,q]=[162,330]$ karena memiliki hasil respon yang lebih baik dibandingkan dengan penempatan daerah *pole* yang lain dan nilai IAE yang terkecil.

Pada Gambar 4 menunjukkan respon posisi kereta dalam satuan meter dengan berbagai kondisi awal pada sudut pendulum. Respon menunjukkan bahwa posisi kereta pada kedua kondisi awal dapat melakukan *tracking* dengan mengikuti nilai referensi yang diberikan. Pada kondisi awal 0,3 rad respon memiliki *overshoot* sebesar -0,112 rad. Sedangkan pada kondisi awal kedua, yaitu 0,5 rad nilai *overshoot* sebesar -0,15 rad.



Gambar 5. Posisi Kereta pada Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal

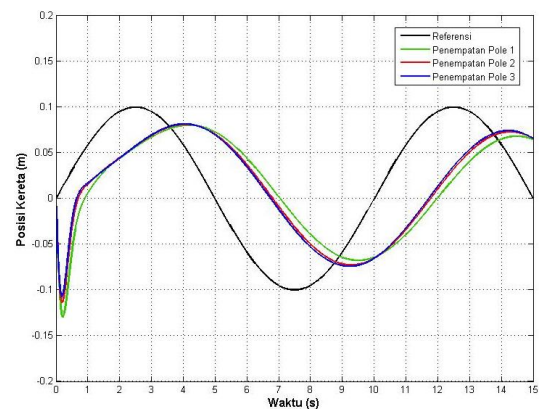
Gambar 5 menunjukkan posisi kereta ketika sistem diberikan gangguan. Ketika gangguan diberikan terjadi penyimpangan sekitar 0,012 meter. Selanjutnya sistem dapat mengatasi gangguan dan kembali mengikuti sinyal referensi setelah 11 detik.



Gambar 6. Posisi Kereta dengan Gangguan

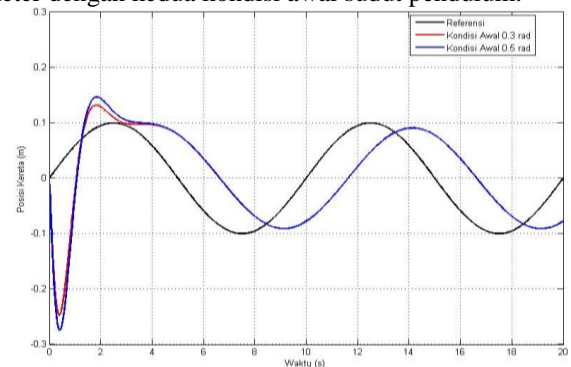
Pada simulasi kedua digunakan sinyal referensi sinus yang dihasilkan dari *Signal Generator* yang dapat ditemukan di *library source* pada *Simulink*.

Gambar 6 menampilkan hasil simulasi posisi kereta dengan sinyal referensi berupa sinyal sinus, dengan membandingkan beberapa kondisi penempatan *pole*.

Gambar 7. Posisi Kereta pada Simulasi Variasi Penempatan *Pole* dengan Referensi Sinyal Sinus

Pada simulasi digunakan variasi penempatan *pole* yang ketiga yaitu $[r,q]=[162,330]$ dengan berbagai kondisi awal. Kondisi awal sudut pendulum yang digunakan adalah 0,3 radian dan 0,5 radian.

Gambar 7 menunjukkan posisi kereta dalam satuan meter dengan kedua kondisi awal sudut pendulum.



Gambar 8. Posisi Kereta pada simulasi dengan berbagai kondisi awal menggunakan referensi sinyal sinus

V. KESIMPULAN

Setelah melakukan pengujian pada makalah ini menggunakan sistem kontrol *fuzzy* Takagi-Sugeno dengan struktur Sistem *Servo* Tipe 1 dengan *plant* tanpa *integrator* yang telah dirancang menggunakan pendekatan LMI (*Linear Matrix Inequalities*) dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil simulasi dari sistem kontrol *fuzzy* Takagi-Sugeno yang telah dibuat menunjukkan bahwa posisi kereta dapat mengikuti masukan berupa sinyal referensi *step* dengan batang pendulum dapat distabilkan pada titik di sekitar nol radian.
2. Beda fase yang terjadi ketika sinyal referensi yang diberikan berupa sinyal sinus menunjukkan bahwa kereta dapat mengikuti referensi tetapi terdapat beda fase
3. Berdasarkan simulasi yang dilakukan didapatkan hasil respon terbaik dihasilkan dengan menggunakan penempatan *pole* $[r,q] = [162, 330]$ dan kondisi awal sudut pendulum yaitu 0,3 radian

4. Hasil simulasi untuk sinyal referensi *step* melalui optimasi menggunakan LMI menghasilkan nilai IAE (*Integral Absolute Error*) sebesar 0,1986 m.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] R. P. Adenia, "Kontrol Tracking Fuzzy-Optimal untuk Sistem Pendulum Kereta," ITS, 2013.
- [2] J. H. S. Putra, "Kontrol Tracking Fuzzy Menggunakan Model Following Untuk Sistem Pendulum Kereta," ITS, 2016.
- [3] H. Indrawati, "Kontrol Fuzzy Takagi-Sugeno Berbasis Sistem Servo Tipe 1 Untuk Sistem Pendulum Kereta," ITS, 2013.
- [4] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, " 3rd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1997.
- [5] M. C. and P. Gahinet, " H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 41, pp. 358–367, 1996.